Chap 9 Fonctions affines et linéaires

Dans tout le chapitre, a et b sont des nombres relatifs connus.

I. Vocabulaire

1. Activité : le vidéo-club

2. Définition

- On appelle fonction affine f, toute fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre ax + b :
  $f : x \rightarrow ax + b$
- On appelle fonction linéaire g, toute fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre ax :
  $g : x \rightarrow ax$
- On appelle fonction constante h, toute fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre b :
  $h : x \rightarrow b$

exemples : Dans l'activité, on a donc : A est linéaire, B est affine et C est constante.

Remarques :

- Une fonction linéaire est le cas particulier de fonction affine avec b = 0. Une fonction linéaire est donc aussi une fonction affine.
- Une fonction constante est le cas particulier de fonction affine avec a = 0. Une fonction constante est donc aussi une fonction affine.

exercice :

Pour chacune de ces fonctions, préciser si elle est affine, linéaire, constante ou non affine.

$f(x) = 5x + 9$ est affine.

$g(x) = 4x^2 - 6$ n'est pas affine (x au carré).

$h(x) = -4{,}1x - 5$ est affine.

$j(x) = \dfrac{3}{x} + 1$ n'est pas affine (x au dénominateur).

$k(x) = -7x$ est linéaire (et donc affine).

$m(x) = 12$ est constante (et donc affine).

3. Calculs d'images et d'antécédents

On considère les trois fonctions suivantes : $f(x) = 40$ $g(x) = -3x$ $h(x) = 5x - 4$.
Ainsi , f est une fonction constante, g est linéaire et h est affine.

① **Pour chacune des fonctions, calculer l'image de 2, de 0 et de – 6.**

$f(2) = 40$
$g(2) = -3 \times 2 = -6$
$h(2) = 5 \times 2 - 4 = 6$

$f(0) = 40$
$g(0) = 0$
$h(0) = -4$

$f(-6) = 40$
$g(-6) = -3 \times (-6) = 18$
$h(-6) = 5 \times (-6) - 4 = -34$

② **Fonction f :**

- **13 a-t-il un antécédent par la fonction f ?**
  Non, car il est impossible de trouver 13 comme résultat. La fonction est constante à 40.

- **Un seul nombre possède un (ou des) antécédent(s) : lequel et combien ?**
  40 a un nombre infini d'antécédents : tous les nombres.

③ **Fonction g :**

Quel est l'antécédent de – 12 ?

On note x l'antécédent de – 12.

On a alors : $g(x) = -3 \times x = -12$

soit $x = \dfrac{-12}{-3} = 4$.

L'antécédent de – 12 est donc 4.

Quel est l'antécédent de 39 ?

On note *y* l'antécédent de 39.

On a alors : $g(y) = -3 \times y = 39$

soit $y = \dfrac{39}{-3} = -13$.

L'antécédent de 39 est donc – 13.

④ **Fonction h :**

Quel est l'antécédent de 21 ?

On note x l'antécédent de 21.

On a alors : $h(x) = 21$ soit $\begin{aligned} 5x - 4 &= 21 \\ 5x &= 21 + 4 \\ 5x &= 25 \\ x &= \frac{25}{5} = 5 \end{aligned}$.

L'antécédent de 21 est donc 5.

Quel est l'antécédent de – 19 ?

On note *y* l'antécédent de – 19.

On a alors : $h(y) = -19$ soit $\begin{aligned} 5x - 4 &= -19 \\ 5x &= -19 + 4 \\ 5x &= -15 \\ x &= \frac{-15}{5} = -3 \end{aligned}$.

L'antécédent de – 19 est donc – 3.

II. Cas particulier : les fonctions linéaires

1. Propriétés

propriétés : Si f est une fonction linéaire alors :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(k \times x) = k \times f(x).$$

preuve : On note *f* une fonction linéaire telle que : $f : x \to ax$.

$$f(x + y) = a \times (x + y) = \underbrace{a \times x}_{f(x)} + \underbrace{a \times y}_{f(y)} = f(x) + f(y)$$

$$f(k \times x) = a \times k \times x = k \times \underbrace{a \times x}_{f(x)} = k \times f(x)$$

exemple :

On note *f* une fonction linéaire telle que : $f(4) = 10$. En déduire f(12) ; f(2) et f(14).

$f(12) = f(3 \times 4) = 3 \times f(4) = 3 \times 10 = 30$
$f(2) = f(0{,}5 \times 4) = 0{,}5 \times f(4) = 0{,}5 \times 10 = 5$
$f(14) = f(12 + 2) = f(12) + f(2) = 30 + 5 = 35$

2. Lien avec la proportionnalité

→ Fiche rappel sur la proportionnalité

Reprenons l'exercice 3 de l'activité : Un robinet a un débit de 15 litres par minute.

- Nous avons montré qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité de coefficient 15.
- Si on appelle d la fonction représentant cette situation (x étant alors la durée en min), on obtient : $d : x \to 15x$. Il s'agit d'une fonction linéaire.

propriété : A toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire.
On dit que cette fonction modélise la situation de proportionnalité.

exemple : ABC est un triangles équilatéral de côté x cm.
La fonction linéaire p définie par $p(x) = 3x$ modélise le périmètre du triangle.

3. Lien avec les pourcentages

Le calcul de pourcentage est une situation de proportionnalité, donc est également associé aux fonctions linéaires.

propriétés :

- Prendre 8 % de x, c'est multiplier par $\frac{8}{100}$ ou 0,08.

  On associe donc la fonction linéaire : $x \to 0{,}08x$
- Augmenter x de 8 %, c'est multiplier par $\frac{108}{100}$ ou 1,08.

  On associe donc la fonction linéaire : $x \to 1{,}08x$
- Diminuer x de 8 %, c'est multiplier par $\frac{92}{100}$ ou 0,92.

  On associe donc la fonction linéaire : $x \to 0{,}92x$

exemples : (photocopie)

1. **Un village de 550 habitants voit sa population diminuer de 2 %.
   De combien d'habitants diminue-t-il ?**

   Il s'agit de prendre 2 % de 550 soit : $0{,}02 \times 550 = 11$
   La population du village a diminuée de 11 habitants.

2. **Au 1er janvier 2011, un vendeur a décidé d'augmenter ses prix de 8 %.**
   a. **Un article vaut actuellement 35 €. Combien coûtera-t-il en 2011 ?**

   $1{,}08 \times 35 = 37{,}80$
   Il coûtera 37,50 € en 2011.

b. Si un article vaut 68,04 € en 2011, quel est son prix actuel ?

Notons x son prix actuel, on a :

$$1{,}08 \times x = 68{,}04$$
$$x = \frac{68{,}04}{1{,}08}$$
$$x = 63$$

Son prix actuel est de 63 €.

c. Traduire cette situation par une fonction linéaire f.

$f : x \to 1{,}08\,x$

3. Dans un collège, entre 2009 et 2010, le nombre d'élèves a baissé de 13 %.
Traduire cette situation par une fonction linéaire c.

$c : x \to 0{,}87\,x$

III. Représentation graphique

Reprenons l'exercice d'introduction et observons les représentations graphiques.

propriété : La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.

- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées (0 ; b).
- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite passant par le point de coordonnées (0 ; b).

Vocabulaire :

- a est appelé le coefficient directeur de la droite.
  Il indique la direction : si a > 0 alors elle "monte".
  si a < 0 alors elle "descend".

- b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite.

IV. Déterminer l'expression algébrique

1. d'une fonction linéaire

On considère f la fonction linéaire vérifiant $f(2) = 5$.
f étant une fonction linéaire, sa forme est : $f : x \to a\,x$ où a est un nombre.

Déterminer l'expression algébrique de f signifie qu'il faut calculer son coefficient a.

$f(2)=5$ signifie : $a\times 2=5$

donc : $a=\dfrac{5}{2}=2{,}5$

f est donc la fonction linéaire définie par $f : x \to 2{,}5x$

2. d'une fonction affine

propriété : On considère la fonction affine *f* définie par $f : x \to ax+b$. Pour deux nombres distincts x et y, on a :

$$a=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

On appelle cette propriété "proportionnalité des accroissements" car elle signifie que les accroissements des nombres f(x) évoluent proportionnellement à ceux de x.

Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine signifie qu'il faut calculer son coefficient a et son ordonnée à l'origine b.

exemple : Déterminer l'expression de la fonction affine f vérifiant $f(5)=4$ et $f(-2)=25$.

On sait que toute fonction affine f est de la forme : $f : x \to ax+b$ où a et b sont des nombres.

D'après la propriété de proportionnalité des accroissements, on a :

$$a=\frac{f(-2)-f(5)}{-2-5}=\frac{25-4}{-7}=\frac{21}{-7}=-3$$

On a donc : $f : x \to -3x+b$ puis

$$\begin{aligned} f(5)=-3\times 5+b&=4\\ -15+b&=4\\ b=4+15&=19 \end{aligned}$$

On en déduit que : $f : x \to -3x+19$