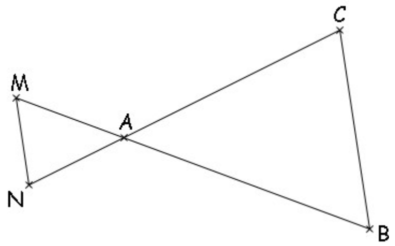
Chap 3 Le théorème de Thalès et sa réciproque

I. Exemple d'introduction



On sait que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1. Placer les points M' et N' les symétriques respectifs de M et N par rapport à A.
2. **a.** Que peut-on dire des droites (M'N') et (BC) ? Justifier.

   (M'N') est la droite symétrique à (MN).
   Or une droite et son image sont parallèles.
   Donc (M'N') et (MN) sont parallèles.
   (M'N') et (BC) étant deux droites parallèles à (MN), elles sont parallèles entre elles.

   b. Démontrer que AM' = AM, AN' = AN et M'N' = MN.

   M' est le symétrique de M par rapport à A, donc AM' = AM.
   N' est le symétrique de N par rapport à A, donc AN' = AN.
   M' et N' sont les symétriques de M et N par rapport à A, donc M'N' = MN.

3. A l'aide des questions précédentes, démontrer que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

   Dans le triangle ABC, M' $\in$ (AB), N' $\in$ (AC) et les droites (M'N') et (BC) sont parallèles.

   Or d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{AM'}{AB} = \dfrac{AN'}{AC} = \dfrac{M'N'}{BC}$

   Donc en appliquant les égalités obtenues à la question 2, on obtient : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

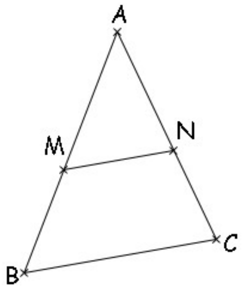
Conclusion : Le théorème de Thalès peut s'appliquer dans des configurations plus larges que celle vue en 4ème.

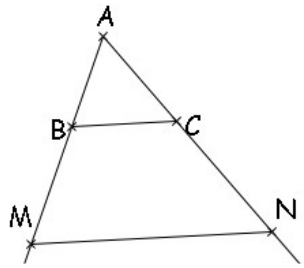
II. Le théorème de Thalès

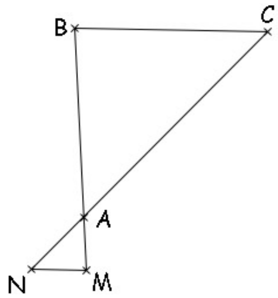
1. configuration de Thalès

Configurations : Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
Soient B et M deux points de (d), distincts de A
Soient C et N deux points de (d'), distincts de A

Voici les 3 configurations de Thalès classiques :







Remarque : On peut résumer la position des différents points par :
"les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A."

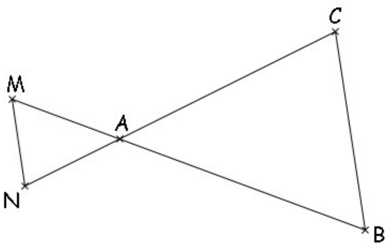
2. énoncé du théorème

Théorème : Dans une configuration de Thalès, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Remarque : Cela signifie que les dimensions du triangle AMN sont proportionnelles à celles de ABC. Le coefficient de proportionnalité est donc $\frac{AM}{AB}$ (ou $\frac{AN}{AC}$ ou encore $\frac{MN}{BC}$)

3. exemple d'utilisation



On sait que : (MN) parallèle à (BC) ; AM = 3 cm ; AB = 5 cm ;
AC = 7,5 cm et MN = 6 cm.
Calculer AN et BC

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{AN}{7{,}5} = \frac{6}{BC}$$

On en déduit :

$\frac{3}{5} = \frac{AN}{7{,}5}$ soit $AN = \frac{3 \times 7{,}5}{5} = 4{,}5$ cm et $\frac{3}{5} = \frac{6}{BC}$ soit $BC = \frac{5 \times 6}{3} = 10$ cm

III. Droites parallèles ou non ?

1. conséquence du théorème

D'après le théorème de Thalès, si les droites sont parallèles alors il y a égalité des 3 rapports.
On en déduit donc que si l'un des 3 est différent, les droites ne sont alors pas être parallèles.

exemple :

EA = 2,1 cm EF = 5 cm EG = 13,5 cm et EH = 5,6 cm.
Les droites (AF) et (GH) sont-elles parallèles ?

méthode :

Si elles l'étaient, on pourrait appliquer le théorème de Thalès et on aurait : $\frac{EA}{EH} = \frac{EF}{EG} = \frac{AF}{HG}$.
Il faut donc calculer au moins 2 des rapports et vérifier que l'on n'a pas égalité.

rédaction :

D'une part, on a : $\frac{EA}{EH} = \frac{2,1}{5,6} = 0,375$

D'autre part, on a : $\frac{EF}{EG} = \frac{5}{13,5} = 0,37$

Donc $\frac{EA}{EH} \neq \frac{EF}{EG}$ et les droites (AF) et (GH) ne sont pas parallèles.

2. Réciproque du théorème de Thalès

On considère une des 3 configurations de Thalès vu précédemment :

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C ,N sont alignés dans le même ordre

alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

exemple :

KM = 12 cm, KO = 18 cm, KP = 21 cm et KN = 14 cm.
Les droites (MO) et (NP) sont-elles parallèles ?

D'une part, on a : $\frac{KM}{KN} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

D'autre part, on a : $\frac{KO}{KP} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

On a donc : $\frac{KM}{KN} = \frac{KO}{KP}$

De plus M, K, N et O, K, P sont alignés dans le même sens.
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MO) et (NP) sont parallèles.